جامعة [illegible] — كلية العلوم

السنة الثالثة — قسم الرياضيات

3 - 5 - 2017

المحاضرة الأولى / [illegible]

تعريف:

نعرف مجموعة جميع الثنائيات (x, y) حيث x و y أعداد حقيقية مع عمليتي الجمع والضرب

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, \; x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

بمجموعة الأعداد العقدية ونرمز لها بالرمز [illegible]

• اذا كان $z = (x, y)$ عدد عقدي

يدعى العدد الحقيقي x بالقسم الحقيقي ونرمز له بالرمز

$$Re\, z = x$$

ويدعى العدد الحقيقي y بالقسم التخيلي للعدد العقدي ونرمز له بالرمز

$$Im\, z = y$$

• نقول عن عددين عقديين

$$z_1 = (x_1, y_1)$$
$$z_2 = (x_2, y_2)$$

انهما متساويين اذا كان

• $Re\, z_1 = Re\, z_2$

اي $x_1 = x_2$

• $Im\, z_1 = Im\, z_2$

$y_1 = y_2$

• إذا كان $Z = x$ و $y = 0$ ، $(x, 0)$ عندئذٍ

• رمزنا لذلك بالعدد x الحقيقي ، أي أن ... من الأعداد الحقيقية

يمكن اعتبار الأعداد الحقيقية مجموعة جزئية من الأعداد العقدية

الأعداد العقدية التي تحقق الأعداد الحقيقية

الأعداد الطبيعية تحقق الأعداد الحقيقية

وهكذا

$$x_1 + x_2 = (x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0 + 0)$$
$$= x_1 + x_2$$

$$x_1 \cdot x_2 = (x_1, 0)(x_2, 0) = (x_2 x_1 - 0)$$
$$= x_1 x_2$$

• نسمي الأعداد العقدية التي من الشكل $(0, y)$ بالأعداد التخيلية البحتة أي أن محور التخيلي مسموم

• إذا رمزنا للعدد العقدي $(0,1)$ بـ i والذي نسميه بالوحدة التخيلية عندئذٍ

$$Z = (x, y) = (x, 0) + (0, y)$$
$$(0, y) = (0, 1)(y, 0)$$

$$\Rightarrow Z = (x, 0) + (0, 1)(y, 0)$$
$$= x + iy$$

الشكل الديكارتي للعدد العقدي:

$$Z = x + iy$$

• اذا كان $Z_1 = x_1 + iy_1$ و $Z_2 = x_2 + iy_2$

عندئذٍ

① $Z_1 + Z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

مثال:

$Z_1 = 1 - 3i$ ، $Z_2 = -2 + i$

$\Rightarrow Z_1 + Z_2 = -1 - 2i$

② $Z_1 \cdot Z_2 = x_1 \cdot x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

$i^2 = i \cdot i = (0,1)(0,1)$

$= (-1, 0+0) = (-1, 0) = -1$

الخصائص الجبرية للأعداد العقدية:

① يمكن الاثبات بسهولة على أن:

$$Z_1 + Z_2 = Z_2 + Z_1$$

اي ان الجمع تبديلي

② يمكن الاثبات بسهولة على أن:

$$Z_1 + (Z_2 + Z_3) = (Z_1 + Z_2) + Z_3$$

اي ان الجمع تجميعي

بالنسبة لعملية

(٣) نعلم أن العدد صفر هو العنصر المحايد بالنسبة لعملية الجمع في الأعداد الحقيقية
كذلك العدد الصفري $0 = (0,0)$ هو العنصر المحايد بالنسبة لعملية الجمع أي أن:

$$z + 0 = (x+iy) + (0,0)$$

$$= (x+0, y+0) = (x+iy) = z$$

أي:

$$z + 0 = 0 + z = z$$

(٤) لكل عدد عقدي z نظير وحيد بالنسبة لعملية الجمع هو $(-z)$ أي أن:

$$z + (-z) = 0$$

ملاحظة:

اعتماداً على مفهوم النظير بالنسبة لعملية الجمع يمكننا تعريف عملية الطرح في مجموعة الأعداد العقدية كما يلي:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

أي:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

ملاحظة: عملية الترتيب في مجموعة الأعداد العقدية ليس لها معنى

⑤ يمكننا الإثبات بسهولة على أن:

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

اي عملية ضرب الأعداد العقدية عملية تبديلية

⑥ يمكن الإثبات بسهولة على أن:

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$$

اي عملية الضرب عملية تجميعية

⑦ نعلم أن العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الجداء في الأعداد الحقيقية هو العدد (1) وهو نفس العنصر الحيادي لعملية الجداء في الأعداد العقدية بالنسبة لعملية الجداء

$$z \cdot 1 = z$$

⑧ لكل عدد عقدي غير صفري معكوس بالنسبة لعملية الجداء

* اذا كان لدينا $z = x + iy$ هو عدد عقدي فإن المعكوس بالنسبة لعملية الجداء ونرمز له بـ z^{-1} حيث أن:

$$z \cdot z^{-1} = 1$$

فاذا فرضنا أن $z^{-1} = u + iv$ عندئذ:

$$(x + iy)(u + iv) = 1 \Rightarrow$$

$$(xu - yv) + i(yu + xv) = 1$$

واعتماداً على تعريف تساوي عددين عقديين نحصل على:

$$xu - yv = 1$$
$$yu + xv = 0$$

هاتان معادلتان تمثلان جملة معادلتين خطيتين ويكون لهذه الجملة حل وحيد إذا كان محدد الأمثال غير معدوم

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2 + y^2 \neq 0$$

عندئذ يوجد حل وحيد:

$$u = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -y \\ 0 & x \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$v = \frac{\begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$\Rightarrow u = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad v = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

وبالتالي إذا كان $Z = x + iy$ عدد عقدي غير صفري فإن المعكوس العقدي لهذا العدد العقدي يعطى بالعلاقة:

$$Z^{-1} = \frac{1}{Z} = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{-y}{x^2+y^2}$$

ملاحظة :

من خلال مفهوم المعكوس الضربي يمكن تعريف عملية القسمة كما يلي :

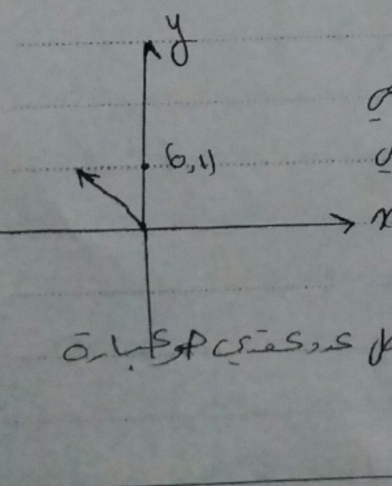
$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$$

اي لإيجاد ناتج قسمة عددين عقديين نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

* التمثيل الهندسي للعدد العقدي :

اذا كان $z = (x, y)$ عندئذ نلاحظ بأن كل عدد عقدي يمكن تمثيله بنقطة بالمستوي XOY

وبالعكس كل نقطة من المستوي الأحداثي تمثل عدداً عقدياً في مثل هذه الحالة ندعو المستوي الأحداثي بالمستوي العقدي ونرمز له بـ z



- المحور الافقي ندعوه المحور الحقيقي
- المحور الشاقولي ندعوه المحور التخيلي

- يمكن هندسياً أن نتصور أن كل عدد عقدي هو عبارة

عن مشاع أو مقصد مباشر لمعطيات الشعر وبيانه
المعطيات الخاطئة للمد العقلي.

...

